[확률통계학 개념완성]

30강. 확률표본과 표본분포 (3)

-이 석 민 교수-

8.6 표본분산의 분포

⋆ 감마함수 : $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$

⋆ 감마분포: $f(x;\alpha,\beta)=\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}$ $(x>0)$

⋆ 자유도가 v인 카이제곱분포: $\alpha=\frac{v}{2}$, $\beta=2$인 감마분포. $f(x;v)=\frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}x^{\frac{v}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$ $(x>0)$

⋆ 평균이 μ이고 분산이 σ^2인 정규모집단으로부터 크기 n의 표본을 추출했을 때 표본분산의 통계량 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 대신 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$의 분포를 많이 이용

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2&=\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\overline{X})+(\overline{X}-\mu)]^2\\&=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}-\mu)^2+2(\overline{X}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})\\&=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+n(\overline{X}-\mu)^2\end{aligned}$$

$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$이므로 $(n-1)S^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}+\frac{(\overline{X}-\mu)^2}{\frac{\sigma^2}{n}}$$

⋆ 참고

따름정리 7.2.10 : 확률변수 $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 서로 독립이고 평균이 μ, 분산이 σ^2인 정규분포를 따르면, $Y=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$ 은 자유도 $v=n$인 카이제곱분포를 따른다.

따름정리 7.2.10에 의해 $\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$은 자유도 n인 카이제곱분포를 따르고, $\frac{(\overline{X}-\mu)^2}{\frac{\sigma^2}{n}}$은 자유도 1인 카이제곱분포를 따름.

* 참고

정리 7.2.9 : 확률변수 $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 서로 독립이고 각각 자유도가 $v_1, v_2, \cdots, v_n$인 카이제곱분포를 따르면, 확률변수 $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$은 자유도가 $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$인 카이제곱분포를 따른다.

두 변수 $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$와 $\frac{(\overline{X} - \mu)^2}{\frac{\sigma^2}{n}}$은 서로 독립이고, 따라서 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$은 자유도 $(n-1)$인 카이제곱분포를 따른다.

<u>정리 8.6.1</u> 분산이 σ^2인 정규모집단으로부터 크기 n인 표본을 추출하였을 때, 표본분산을 S^2이라 하면 통계량 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}$은 자유도 $v = n-1$인 카이제곱분포를 따른다.

예) 어떤 자동차배터리 제조업자는 자기회사에서 제조한 배터리의 수명이 평균은 3년, 표준편차는 1년이라고 주장하고 있다. 이 회사에서 제조된 5개의 배터리를 임의로 추출하여 시험한 결과 그 수명이 각각 1.9년, 2.4년, 3.0년, 3.5년, 4.2년이었다. 이 결과를 가지고 제조업자가 주장하는 표준편차가 1년이라는 것을 믿을 수 있는가를 보여라. 배터리의 수명은 정규분포를 따른다고 가정하자.

풀이) 5개의 배터리의 표본분산은

$$s^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n(n-1)} = \frac{(5)(48.26) - (15)^2}{(5)(4)} = 0.815$$

따라서 $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(4)(0.815)}{1} = 3.26$

이는 자유도 4인 카이제곱분포의 값

자유도 4인 경우 χ^2 값이 95%가 0.484와 11.143 사이에 오게 되므로, $\sigma^2 = 1$로 하여 계산된 χ^2의 값 3.26으로, 표준편차가 1년이라는 이 제조업자의 주장은 합당하다고 할 수 있다.

8.7 t분포

* 중심극한정리 - $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 이용, 모분산(모표준편차)가 알려져 있어야 모평균(두 모평균의 차) 추정

* 모분산을 알고 있는 경우는 극히 드뭄
* $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$ 으로 모평균 추정
* 통계량 T는 표본의 크기가 30 이상이면 근사적으로 표준정규분포를 따름
* 표본의 크기가 30보다 작은 경우, 통계량 T의 정확한 분포 사용
* 모집단은 정규모집단이라 가정

$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}=\dfrac{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{S^2/\sigma^2}}$ 을 만족

$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ (표준정규분포를 따름), $V=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ (자유도 $v=n-1$인 카이제곱분포를 따름) 라 하면

$T=\dfrac{Z}{\sqrt{V/(n-1)}}$ 을 얻는다.

정규모집단에서 표본을 추출할 경우 $\overline{X}$와 S^2은 서로 독립이므로, Z와 V도 서로 독립이다.

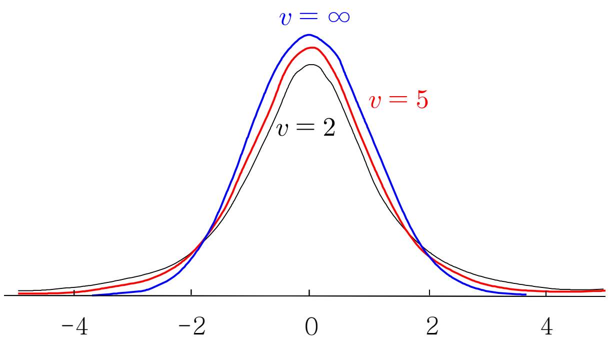
<u>정리 8.7.1</u> Z는 표준정규확률변수, V는 자유도 v인 카이제곱확률변수이고, Z와 V가 서로 독립일 때, $T=\dfrac{Z}{\sqrt{V/v}}$의 확률밀도함수는 $h(t)=\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{v}{2}\right)\sqrt{\pi v}}\left(1+\dfrac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$, $-\infty<t<\infty$

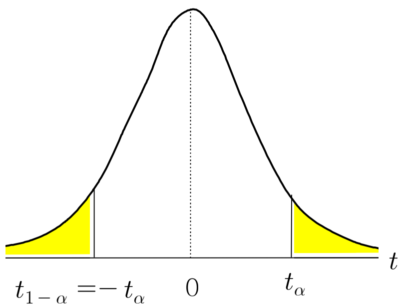
가 되고, 이는 **자유도 v인 t분포**라 한다.

<u>따름정리 8.7.2</u> $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 모두 평균이 μ이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고 서로 독립인 확률변수일 때, 확률변수 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$은 자유도가 $v=n-1$인 t분포를 따른다.

(여기서 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$)

1908년 고셋(W.S. Gosset)이 Student라는 이름으로 발표 - ‘Student t-분포’라고도 함



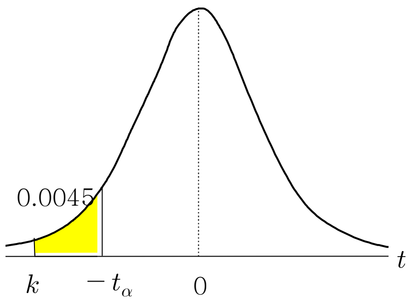


* 원점을 지나는 수직선을 중심으로 대칭
* 자유도가 커질수록 표준정규분포에 접근
* t_α를 t분포에서 오른쪽 면적이 α인 t의 값이라 하면, 대칭이므로 $t_{1-\alpha}=-t_\alpha$

예) 자유도 14인 t분포에서 왼쪽 면적이 0.025가 되는 t값은?
$t_{0.975}=-t_{0.025}=-2.145$

예) $P(-t_{0.025}<T<t_{0.05})$를 구하라.
풀이) $t_{0.05}$는 t분포곡선에서 오른쪽 면적이 0.05이고, $-t_{0.025}$는 왼쪽 면적이 0.025이므로 나머지 면적은 1-0.05-0.025 = 0.925이다. 따라서 $P(-t_{0.025}<T<t_{0.05})=0.925$

예) 정규모집단에서 15개의 표본을 추출했을 때, $P(k<T<-1.761)=0.045$를 만족하는 k 값을 구하라.



풀이) 자유도 14인 t분포에서 1.761은 $t_{0.05}$에 대응

$k=-t_\alpha$라 하면 $-t_{0.05}=-1.761$이므로 $0.045=0.05-\alpha$이고 따라서 $\alpha=0.005$

표에서 찾으면 $k=-t_{0.005}=-2.977$

그러므로 $P(-2.977<T<-1.761)=0.045$

예) 어느 공정에서 관리자가 원재료 리터당 제품이 500g씩 제조된다고 주장한다. 이를 입증하기 위해 매월 25개의 표본을 추출하여 시험을 하였다. 시험결과 계산된 t값이 $-t_{0.05}$와 $t_{0.05}$ 사이에 있으면 그의 주장이 타당성이 있다고 하기로 한다. 25개 샘플의 시험결과 표본평균은 518g이고 표준편차는 40g이었다면 어떤 결론을 낼 수 있겠는가? (모집단은 근사적으로 정규분포를 따른다고 가정)

풀이) $t=\dfrac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}=\dfrac{518-500}{40/\sqrt{25}}=2.25$이다. 자유도가 24일 때 $t_{0.05}=1.711$이다. 계산된 t값이 $t_{0.05}$보다 크므로 실제로는 원재료 리터당 제품량은 500g보다 크다고 할 수 있다.

t 분포표

	α						
v	0.40	0.30	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025
1	0.325	0.727	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706
2	0.289	0.617	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303
3	0.277	0.584	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182
4	0.271	0.569	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776
5	0.267	0.559	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571
6	0.265	0.553	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447
7	0.263	0.549	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365
8	0.262	0.546	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306
9	0.261	0.543	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262
10	0.260	0.542	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228
11	0.260	0.540	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201
12	0.259	0.539	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179
13	0.259	0.538	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160
14	0.258	0.537	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145
15	0.258	0.536	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131
16	0.258	0.535	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120
17	0.257	0.534	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110
18	0.257	0.534	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101
19	0.257	0.533	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093
20	0.257	0.533	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086
21	0.257	0.532	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080
22	0.256	0.532	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074
23	0.256	0.532	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069
24	0.256	0.531	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064
25	0.256	0.531	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060
26	0.256	0.531	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056
27	0.256	0.531	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052
28	0.256	0.530	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048
29	0.256	0.530	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045
30	0.256	0.530	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042
40	0.255	0.529	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021
60	0.254	0.527	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000
120	0.254	0.526	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980

t 분포표 (계속)

v \ α	0.02	0.015	0.01	0.0075	0.005	0.0025	0.0005
1	15.895	21.205	31.821	42.433	63.657	127.321	636.619
2	4.849	5.643	6.965	8.073	9.925	14.089	31.599
3	3.482	3.896	4.541	5.047	5.841	7.453	12.924
4	2.999	3.298	3.747	4.088	4.604	5.598	8.610
5	2.757	3.003	3.365	3.634	4.032	4.773	6.869
6	2.612	2.829	3.143	3.372	3.707	4.317	5.959
7	2.517	2.715	2.998	3.203	3.499	4.029	5.408
8	2.449	2.634	2.896	3.085	3.355	3.833	5.041
9	2.398	2.574	2.821	2.998	3.250	3.690	4.781
10	2.359	2.527	2.764	2.932	3.169	3.581	4.587
11	2.328	2.491	2.718	2.879	3.106	3.497	4.437
12	2.303	2.461	2.681	2.836	3.055	3.428	4.318
13	2.282	2.436	2.650	2.801	3.012	3.372	4.221
14	2.264	2.415	2.624	2.771	2.977	3.326	4.140
15	2.249	2.397	2.602	2.746	2.947	3.286	4.073
16	2.235	2.382	2.583	2.724	2.921	3.252	4.015
17	2.224	2.368	2.567	2.706	2.898	3.222	3.965
18	2.214	2.356	2.552	2.689	2.878	3.197	3.922
19	2.205	2.346	2.539	2.674	2.861	3.174	3.883
20	2.197	2.336	2.528	2.661	2.845	3.153	3.850
21	2.189	2.328	2.518	2.649	2.831	3.135	3.819
22	2.183	2.320	2.508	2.639	2.819	3.119	3.792
23	2.177	2.313	2.500	2.629	2.807	3.104	3.768
24	2.172	2.307	2.492	2.620	2.797	3.091	3.745
25	2.167	2.301	2.485	2.612	2.787	3.078	3.725
26	2.162	2.296	2.479	2.605	2.779	3.067	3.707
27	2.158	2.291	2.473	2.598	2.771	3.057	3.690
28	2.154	2.286	2.467	2.592	2.763	3.047	3.674
29	2.150	2.282	2.462	2.586	2.756	3.038	3.659
30	2.147	2.278	2.457	2.581	2.750	3.030	3.646
40	2.123	2.250	2.423	2.542	2.704	2.971	3.551
60	2.099	2.223	2.390	2.504	2.660	2.915	3.460
120	2.076	2.196	2.358	2.468	2.617	2.860	3.373

8.8 F 분포

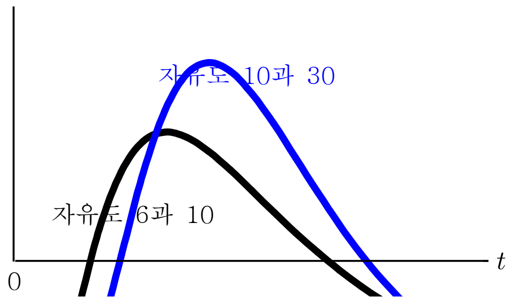
* 표본간의 분산을 비교하는데 많이 이용되는 분포 (두 정규모집단의 모분산들의 비에 대한 통계적 추론, 분산분석 등에서 활용)
* 통계량 F : 두 개의 서로 독립된 카이제곱변수를 각각의 자유도로 나눈 비

$F=\dfrac{U/v_1}{V/v_2}$, U, V는 서로 독립이고 각각 자유도가 v_1, v_2인 카이제곱확률변수

정리 8.8.1 확률변수 U와 V는 각각 자유도 v_1, v_2를 가지는 카이제곱분포를 따를 때,

$F=\dfrac{U/v_1}{V/v_2}$의 확률밀도함수는
$$h(f)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{v_1+v_2}{2}\right)\left(\dfrac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{v_2}{2}\right)}\dfrac{f^{\frac{v_1}{2}-1}}{\left(1+\dfrac{v_1 f}{v_2}\right)^{\frac{v_1+v_2}{2}}}, & f>0\\ 0, & f\le 0\end{cases}$$
이고, 이는 자유도 v_1, v_2인 F 분포라고 한다.

* F분포곡선의 형태는 두 자유도 v_1, v_2에 의해 결정됨



* F 분포표 : f_α로 표시 ($h(f)$의 오른쪽 면적이 α인 f값)

정리 8.8.2 자유도 v_1, v_2에서 f_α값을 $f_\alpha(v_1, v_2)$라 할 때, $f_{1-\alpha}(v_1, v_2)=\dfrac{1}{f_\alpha(v_2, v_1)}$이다.

예) 자유도가 6과 10일 때 오른쪽 부분의 면적이 0.95가 되는 f값:

$$f_{0.95}(6, 10)=\frac{1}{f_{0.05}(10, 6)}=\frac{1}{4.06}=0.246$$

* 두 모집단의 모분산이 각각 σ_1^2, σ_2^2으로 알려져 있는 정규모집단에서 크기 n_1, n_2인 표본을 추출했다고 하자. 그러면 정리 8.6.1에 의해

$\chi_1^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}$은 자유도가 $v_1 = n_1 - 1$인 카이제곱분포,

$\chi_2^2 = \dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}$은 자유도가 $v_2 = n_2 - 1$인 카이제곱분포를 따르게 된다.

<u>정리 8.8.3</u> 모분산이 각각 σ_1^2, σ_2^2인 정규모집단에서 서로 독립적으로 추출된 크기 n_1, n_2인 표본의 분산을 S_1^2, S_2^2이라고 할 때, $F = \dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \dfrac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2}$은 자유도 $v_1 = n_1 - 1$과 $v_2 = n_2 - 1$인 F분포를 따른다.

* $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$이면, $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$. F분포를 분산비분포(variance-ratio distribution)라고도 함.

F 분포표

v_2	$f_{0.05}(v_1,\ v_2)$								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.45	199.5	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
2	18.51	19	19.16	19.25	19.3	19.33	19.35	19.37	19.38
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.1
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.5	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.1	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.2	3.09	3.01	2.95	2.9
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3	2.91	2.85	2.8
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
14	4.6	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.7	2.65
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.9	2.79	2.71	2.64	2.59
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
17	4.45	3.59	3.2	2.96	2.81	2.7	2.61	2.55	2.49
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19	4.38	3.52	3.13	2.9	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
20	4.35	3.49	3.1	2.87	2.71	2.6	2.51	2.45	2.39
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37
22	4.3	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.4	2.34
23	4.28	3.42	3.03	2.8	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32
24	4.26	3.4	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.3
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.6	2.49	2.4	2.34	2.28
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
28	4.2	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
29	4.18	3.33	2.93	2.7	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
60	4	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.1	2.04
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96

F 분포표 (계속)

v_2	$f_{0.05}(v_1, v_2)$ 10	12	15	20	24	30	40	60	120
1	241.88	243.91	245.95	248.01	249.05	250.1	251.14	252.2	253.25
2	19.4	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49
3	8.79	8.74	8.7	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55
4	5.96	5.91	5.86	5.8	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66
5	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.5	4.46	4.43	4.4
6	4.06	4	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.7
7	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.3	3.27
8	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97
9	3.14	3.07	3.01	2.94	2.9	2.86	2.83	2.79	2.75
10	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.7	2.66	2.62	2.58
11	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45
12	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34
13	2.67	2.6	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.3	2.25
14	2.6	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18
15	2.54	2.48	2.4	2.33	2.29	2.25	2.2	2.16	2.11
16	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06
17	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.1	2.06	2.01
18	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97
19	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93
20	2.35	2.28	2.2	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.9
21	2.32	2.25	2.18	2.1	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87
22	2.3	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84
23	2.27	2.2	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81
24	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79
25	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77
26	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.9	1.85	1.8	1.75
27	2.2	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73
28	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71
29	2.18	2.1	2.03	1.94	1.9	1.85	1.81	1.75	1.7
30	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68
40	2.08	2	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58
60	1.99	1.92	1.84	1.75	1.7	1.65	1.59	1.53	1.47
120	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.5	1.43	1.35

F 분포표 (계속)

	$f_{0.01}(v_1, v_2)$								
v_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4052.18	4999.5	5403.35	5624.58	5763.65	5858.99	5928.36	5981.07	6022.47
2	98.5	99	99.17	99.25	99.3	99.33	99.36	99.37	99.39
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35
4	21.2	18	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.8	14.66
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.1	7.98
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.8	5.61	5.47	5.35
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.2	5.06	4.94
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.5	4.39
13	9.07	6.7	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.3	4.19
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4	3.89
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.2	4.03	3.89	3.78
17	8.4	6.11	5.18	4.67	4.34	4.1	3.93	3.79	3.68
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.6
19	8.18	5.93	5.01	4.5	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
20	8.1	5.85	4.94	4.43	4.1	3.87	3.7	3.56	3.46
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.4
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.3
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.9	3.67	3.5	3.36	3.26
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
27	7.68	5.49	4.6	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
29	7.6	5.42	4.54	4.04	3.73	3.5	3.33	3.2	3.09
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.7	3.47	3.3	3.17	3.07
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56

F 분포표 (계속)

	$f_{0.01}(v_1, v_2)$								
v_2	10	12	15	20	24	30	40	60	120
1	6055.85	6106.32	6157.28	6208.73	6234.63	6260.65	6286.78	6313.03	6339.39
2	99.4	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49
3	27.23	27.05	26.87	26.69	26.6	26.5	26.41	26.32	26.22
4	14.55	14.37	14.2	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56
5	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.2	9.11
6	7.87	7.72	7.56	7.4	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97
7	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74
8	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.2	5.12	5.03	4.95
9	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.4
10	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4
11	4.54	4.4	4.25	4.1	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69
12	4.3	4.16	4.01	3.86	3.78	3.7	3.62	3.54	3.45
13	4.1	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25
14	3.94	3.8	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09
15	3.8	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96
16	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.1	3.02	2.93	2.84
17	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3	2.92	2.83	2.75
18	3.51	3.37	3.23	3.08	3	2.92	2.84	2.75	2.66
19	3.43	3.3	3.15	3	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58
20	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52
21	3.31	3.17	3.03	2.88	2.8	2.72	2.64	2.55	2.46
22	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.5	2.4
23	3.21	3.07	2.93	2.78	2.7	2.62	2.54	2.45	2.35
24	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.4	2.31
25	3.13	2.99	2.85	2.7	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27
26	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.5	2.42	2.33	2.23
27	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.2
28	3.03	2.9	2.75	2.6	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17
29	3	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14
30	2.98	2.84	2.7	2.55	2.47	2.39	2.3	2.21	2.11
40	2.8	2.66	2.52	2.37	2.29	2.2	2.11	2.02	1.92
60	2.63	2.5	2.35	2.2	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73
120	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53